SOLUCIONES - Opción A - MATEMÁTICAS ACS II

Ejercicio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 0 \iff a = -\frac{7}{4}$$

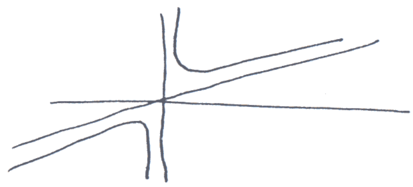
a) Si $a \neq -\frac{7}{4}$, $\det(A) \neq 0$, $\left.\begin{array}{l} r(A) = 3 \\ r(A|b) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sistema compatible y determinado

Si $a = -\frac{7}{4}$, $\left.\begin{array}{l} r(A) = 2 \\ r(A|b) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sistema incompatible

b) Para $a = 4$, $x = y = z = 1$

Ejercicio 2. $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{(x+3)}$. Asíntotas verticales: como la función es racional, son los ceros del denominador: $x+3=0 \Rightarrow x = -3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +3^-} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$$



Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$: no hay.

Asíntotas oblicuas: $y = ax + b$; $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{(x-3)^2}{(x+3)}}{x} = 1$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{(x-3)^2}{(x+3)} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{9 - 9x}{x-3} = -9$$

$y = x - 9$: asíntota oblicua

b) $f'(x) = \dfrac{2(x-3)(x+3) - (x-3)^2}{(x+3)^2} = 0 \Rightarrow 2(x-3)(x+3) - (x-3)^2 = 0 \Rightarrow$

$(x-3)[2(x+3) - (x-3)] = 0 \Rightarrow \underset{\text{mínimo}}{x = 3},\ \underset{\text{máximo}}{x = -9}$: extremos relativos

intervalos	$(-\infty, -9)$	-9	$(-9, -3)$	$(-3, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$ (por ejemplo, $f'(-10) > 0$)	0	$-$	$-$		$+$
		máx. relativo	$\searrow$	$\searrow$	mín relativo	$\nearrow$

Ejercicio 3.

A = tener internet

B = tener TV por cable

a) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{33}{100} - \frac{20}{100} = \frac{13}{100} = 13\%$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$

$1 - \left[\frac{40}{100} + \frac{33}{100} - \frac{20}{100}\right] = 1 - \frac{53}{100} = \frac{47}{100} = 47\%$

Ejercicio 4.

$x \to N(35, 5^2)$

a) $\mu_{\bar{x}} = 35$, $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

b) $P(36 < \bar{x} < 37) = P\left(\frac{36-35}{5/10} < z < \frac{37-35}{5/10}\right) = P(2 < z < 4) =$

$= \phi(4) - \phi(2) \simeq 1 - 0.9772 = 0.0228$

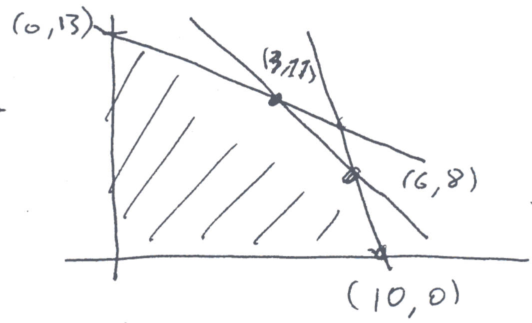
Opción B.

Ejercicio 1.

nº metros x100		kg acero	kg titanio	kg aluminio	Beneficio
cable tipo A	x	$10x$	$2x$	x	$1500x$
cable tipo B	y	$15y$	y	y	$1000y$
Restricciones	≥ 0	≤ 195	≤ 20	≤ 14	

Maximizar $F(x,y) = 1500x + 1000y$ s.a.

$$\left.\begin{array}{l} 10x + 15y \leq 195 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$



$F(0,13) = 13000$

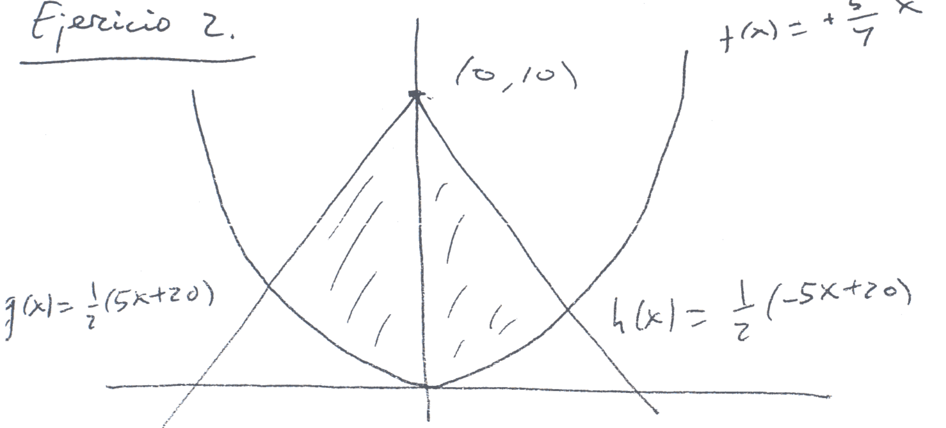
$F(10,0) = 15000$

$\boxed{F(6,8) = 17000}$

$F(3,11) = 15500$

$\left.\begin{array}{l} 6 \times 100 = 600 \text{ metros tipo A} \\ 8 \times 100 = 800 \text{ metros tipo B} \end{array}\right\}$ 17000 € de beneficio

Ejercicio 2.



$g(x) = h(x) \Longrightarrow x = 0$

En $(x,y) = (0,10)$ se cortan las gráficas de $h(x)$ y $g(x)$.

$f(x) = g(x) \Rightarrow \quad \frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{2}(5x+20) \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 8 = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -2 \end{matrix}$ Nos interesa el pto. $(-2, 5)$

$f(x) = h(x) \Rightarrow \quad \frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{2}(-5x+20) \Rightarrow$ pto. $(2, 5)$

Luego la integral pedida es:

$$I = \underbrace{\int_{-2}^{0} [g(x) - f(x)]\,dx + \int_{0}^{2} [h(x) - f(x)]\,dx}_{\text{son iguales, basta calcular una}} = 2\int_{-2}^{0} [g(x) - f(x)]\,dx$$

$$= 2\left[\frac{5}{2}\frac{x^2}{2} + 10x - \frac{5}{4}\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} = 2 \cdot \frac{35}{3} = \frac{70}{3}$$

Ejercicio 3. $\quad A =$ el pianista seleccionado es virtuoso.

$P(C_1) = 0.4 \qquad P(C_2) = 0,35 \qquad P(C_3) = 0,25$

$P(A|C_1) = 0,05 \qquad P(A|C_2) = 0,03 \qquad P(A|C_3) = 0.04$

a) $P(A) = P(C_1)\,P(A|C_1) + P(C_2)\,P(A|C_2) + P(C_3)\,P(A|C_3) =$

$0.4 \times 0,05 + 0,35 \times 0,03 + 0,25 \times 0.04 = \underline{0,0405}$

b) $P(C_1|A) = \dfrac{P(A|C_1)\,P(C_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|C_i)\,P(C_i)} = \dfrac{0,05 \times 0,4}{0,0405} = \dfrac{0,02}{0,0405} = \underline{0,49382}$

Ejercicio 4

$\bar{x} = 48.6 \quad , \quad z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1.96 \quad , \quad X \sim N(\mu, 10^2)$

$IC = \left(48,6 \pm 1.96 \frac{10}{\sqrt{10}}\right) = \underline{(42.40,\ 54.79)}$